39. 全微分方程式ノ積分ニ就テ（II）

（広島文理大）占部　實

§6. n個ノ変数ノ場合ヘノ擴張

以下ニ於テハ suffix ニ関シ tensor ノ記法ヲ用フ。

3個ノ変数ニ就テ今マデ行ツテ来タ議論ハ変数ガn個アル場合ニ容易ニ拡張出来ル。本節ニ於テハn個ノ変数$x^1, x^2, \cdots, x^n$ヲ有スル全微分方程式ノ積分ヲ論ズル。即チ次ノ全微分方程式ヲ考ヘル。

$$\Omega \equiv X_i dx^i \qquad (6.1)$$

今$\Omega=0$ガ integrable デアルトシ、其任意ノ integral ヲ$\varphi(x)=const.$トスル。[1] $\varphi(x)$ニ對應スル integrating factor ヲλトスル。

即チ $\lambda X_i = \dfrac{d\varphi}{dx^i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ $\qquad (6.2)$

$(x^1, x^2, \cdots x^n)$ヲ座標トスルn次元空間ヲ考ヘルト$\varphi(x)=const$ハ一ツノ hypersurface Sヲアラハス。即チ$\Omega=0$ノ integral hypersurface デアル。S上ニ任意ニ一点$P_0(\underset{0}{x})$ヲ取リ、P_0ヲ通ル surface F_1ヲ考ヘ、[2] SトF_1トノ交線ヲC_1トスル。C_1上ニ任意ニ他ニ一点$P_1(\underset{1}{x})$ヲ取ル。次キニP_1ヲ通ル surface F_2ヲ考ヘF_2トSトノ交線C_2上ニ他ニ任意ニ一点$P_2(\underset{2}{x})$ヲ取ル。順次是ヲツヾケ点$P_{n-1}(\underset{n-1}{x})$ニ至ル。surface F_p $(p=1,2,\cdots,n-1)$ノ方程式ハ$(n-2)$個ノ互ニ独立ナ方程式ノ組デアタヘラレル。即チF_pノ方程式ヲ次ノモノトスル。

$$F_p:\quad \overset{\lambda}{\underset{p}{x}} = \overset{\lambda}{\underset{p}{a}} \quad (\overset{\lambda}{\underset{p}{a}} = const.) \quad (\lambda = 2,3,\cdots,n-1) \qquad (6.3)$$

カヤウニシタトキ曲線C_pノ方程式ハ次式ヲ積分シテ得ラレル。

$$\left.\begin{aligned} &\Omega \equiv X_i dx^i = 0 \\ &d\overset{\lambda}{\underset{p}{x}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

(6.4)ノ integral ノ一ツヲ$f_p(x, \overset{\lambda}{\underset{p}{a}}) = const.$トスル。然ルトキ曲線$C_p$ハ点$P_{p-1}$, P_pヲ通ル故次ノ関係式ガ成立スル。

$$\left.\begin{aligned} &f_p(\underset{p-1}{x}, \overset{\lambda}{\underset{p}{a}}) = f_p(\underset{p}{x}, \overset{\lambda}{\underset{p}{a}}) \\ &\overset{\lambda}{\underset{p}{x}}(\underset{p-1}{x}) = \overset{\lambda}{\underset{p}{a}} = \overset{\lambda}{\underset{p}{x}}(\underset{p}{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

此等ヨリ$\overset{\lambda}{\underset{p}{a}}, \underset{1}{x}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{x}^i$ヲ消去スル。方程式ノ数ハ

$$2(n-1)(n-2)+(n-1) = 2n^2-5n+3.$$

消去スベキ文字ノ数ハ

(1) 以下混乱ヲ生ズル虞レノナイ限リ$\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ヲ$\varphi(x)$ト略記スル。

(2) 2次元部分空間ヲ surface トイフ。

$$(n-1)(n-2)+n(n-2)=2n^2-5n+2.$$

依テ一般ニハ消去式ガ一ツ得ラレル。ソレヲ 亜$(\chi_0, \chi_{n-1})=0$ トスル。然ルトキ変数ガ3個ノ場合ニ於ケルト同様ニ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナルトキハ $\overset{\lambda}{\chi}_p$ ガ一定ノ條件ヲ満足シ、f_p ヲ適当ニ選ブ時ハ消去式ガ必ズ一ツ得ラレ、其ハ $\Omega=0$ ノ任意ノ *integral* ノ $\varphi(x)$ ヲ用ヒテ常ニ $\varphi(\chi_0)=\varphi(\chi_{n-1})$ ノ形ニ帰着セシメ得ルコトヲ証明スルコトガ出来ル。カクシテ此方法ニヨリ $\varphi(x)=const.$ ナル *integral* ガ求メラレルコトニナル。

先ヅ $\overset{\lambda}{\chi}_p$ ノ満足スベキ條件ニ就テ考ヘル。

$$D_p \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots\cdots & X_n \\ \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}_p}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}_p}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}_p}{\partial x^n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}_p}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}_p}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}_p}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

トオク。或ル p ニ対シテ $\rho(D_p)<n-1$ デアツタトスル。[1] $\overset{2}{\chi}_p, \overset{3}{\chi}_p, \cdots, \overset{n-1}{\chi}_p$ ハ互ニ独立デアルカラ此等ノ x^i ニ関スル *Jacobian matrix* カラ作ツタ $(n-2)$ 次ノ行列式ノ中ニハ0デナイモノガ少クトモ一ツ存在スル。

今例ヘバ $$\frac{\partial(\overset{2}{\chi}_p, \overset{3}{\chi}_p, \cdots\cdots, \overset{n-1}{\chi}_p)}{\partial(x^2, x^3, \cdots\cdots, x^{n-1})} \neq 0$$ トスル。然ルトキ $x^1, x^n, \overset{2}{\chi}_p, \cdots\cdots, \overset{n-1}{\chi}_p$ ハ互ニ独立トナル。依テ変数 x^i カラ変数 $x^1, x^n, \overset{2}{\chi}_p, \cdots\cdots, \overset{n-1}{\chi}_p$ ニ交換ガ可能トナル。然ルトキ

$$\Omega \equiv X_i dx^i = Y_\lambda d\overset{\lambda}{\chi}_p + Y_1 dx^1 + Y_n dx^n. \tag{6.7}$$

此処デ Y_λ Y_1, Y_n ハ x^1, x^n, $\overset{\lambda}{\chi}_p$ ノ函数デアル。然ルトキ (6.7) ノ両辺ヲ比較シテ次式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} & Y_\lambda \frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}_p}{\partial x^\mu} = X_\mu \qquad (\mu=2,3,\cdots\cdots,n-1) && \text{(i)} \\ & Y_\lambda \frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}_p}{\partial x^1} + Y_1 = X_1 && \text{(ii)} \\ & Y_\lambda \frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}_p}{\partial x^n} + Y_n = X_n && \text{(iii)} \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

---

(1) 一般ニ *matrix* A ガアルトキ、ソノ *rank* ヲ $\rho(A)$ デアラハス。

サテ $\rho(\underset{p}{D})<n-1$ 且ツ $\overset{1}{\underset{p}{\chi}},\cdots,\overset{n-1}{\underset{p}{\chi}}$ ハ互ニ独立デアルカラ次式ヲ満足スルt_λガ存在スル。 $X_i = t_\lambda \dfrac{\partial \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}}{\partial x^i}$ (6.9)

是ヲ (6.8) (i)ニ代入スレバ

$$(Y_\lambda - t_\lambda)\frac{\partial \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}}{\partial x^\mu} = 0.$$

然ルニ仮定ヨリ $\det.\left|\dfrac{\partial \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}}{\partial x^\mu}\right| \neq 0.$ 依テ $Y_\lambda = t_\lambda$。是ヲ (6.8) (ii) (iii)ニ代入シ (6.9) ヲ用フレバ $Y_1 = Y_n = 0$、故ニ Ω ハ次ノ如クナル。

$$\Omega = Y_\lambda d\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}} \tag{6.10}$$

サテ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナラバ、ソノ *integral* ヲ $\varphi(x)=\text{const.}$ 是ニ対應スル *integrating factor* ヲ入トスレバ (6.10) ヨリ次式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} = 0 \\ &\lambda Y_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}} \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

依テ φ ハ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ノミノ函数トナリ、且ツ Y_λ ハ *common factor* ヲ除ケバ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ノミノ函数トナル。依テ此時ハ $\Omega=0$ ハ *common factor* デ全体ヲ除スレバ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ノミノ式トナリ、変数ノ数ハ $(n-2)$ 個トナル。然ルトキ此ノ $(n-2)$ 個ノ変数ノ $\Omega=0$ ニ再ビ我々ノ方法ヲホドコセバ、此際並ダ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ $(p=1,2,\cdots,n-3,\ \lambda=2,3,\cdots,n-3)$ ニツキ スベテノ p ニ対シ $\rho(\underset{p}{D})=n-3$ トナルカ或ハアル p ニツイテハ $\rho(\underset{p}{D})<n-3$ トナルカデアル。$\rho(\underset{p}{D})<n-3$ ナル如キ p ガアル時ハ再ビ上ノ過程ヲ繰返ス。順次カヤウニスル時ハ、結局 $\Omega=0$ ハアル幾ツカノ変数例ヘバ m 個ノ変数ニ対シテ $(m \leqq n-2)$ 常ニ $\rho(\underset{p}{D})=m-1$ トナルカ或ハ1個又ハ2個ノ変数ノ場合ニ帰着セシメラレル。而シテ変数ガ1個又ハ2個ノ場合ハ $\Omega=0$ ハ直チニ積分サレ其 *integral* ハ直接求メラレル。依テ我々ハ m 個ノ変数ノモノニツキ、スベテノ p ニ対シ $\rho(\underset{p}{D})=m-1$ ナル場合ヲ考慮スレバヨイコトニナル。

此立場ヨリ (6.16) ノ $\underset{p}{D}$ ニ対シテハ スベテノ p ニ対シ $\rho(\underset{p}{D})=n-1$ デアル場合ニツキ論ズレバ十分トナル。依テ我々ハ以下ニ於テハ、スベテノ p ニ対シ $\rho(\underset{p}{D})=n-1$ デアルトシテ議論ヲ進メテ行ク。

$\rho = (D_p) = n-1$ ナル時ハ(6.4)ハ *linearly independent* ナ$(n-1)$個ノ方程式カラ成リ　従ツテ曲線ヲアラハシ. $(n-1)$個ノ独立解ヲ有スル。

サテ(6.4)ノ *integral* ノ一ツヲ選デ其ヲ f_{γ} トシ. 曲線 C_p ノ方程式ヲ $f_p = \text{const.}$ $\chi^{\lambda}_p = \text{const.}$ トスルノデアルカラ §2デ考ヘタト同様ニ f_p ハ χ^{λ}_p ニ独立ノモノデナケレバナラヌ。サテ $\rho(D_p) = n-1$ デアルカラ(6.4)ハ$(n-1)$個ノ独立解ヲ有スル。χ^{λ}_p ハ$(n-2)$個ノ独立解デアルカラ尚一個此等ニ独立ナ解ガ存在スル。依テ我々ハカヽル *integral* ヲ $f_p = \text{const.}$ トスル。

次ギニ次式デ定義サレル *matrix* Δ' ヲ考ヘル。

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -D_2 & D_2 & & & \vdots \\ 0 & -D_3 & D_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -D_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -D_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

簡単ノタメ $D_p = \| a^{\kappa}_{p\,i} \|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\kappa = 1, 2, \ldots, n-1$; κハ行, iハ列ヲアラハストスル)ト書ク。 $\rho(\Delta') \leqq n(n-2)$. 今若シ $\rho(\Delta') < n(n-2)$ ナリトスル。然ルトキハ次式ヲ満足スル悉クハ0ナラサル $Z^i_1, Z^i_2, \ldots\ldots, Z^i_{n-2}$ ガ存在スル。

$$\begin{aligned} a^{\kappa}_{1\,i} Z^i_1 &= 0 \\ -a^{\kappa}_{2\,i} Z^i_1 + a^{\kappa}_{2\,i} Z^i_2 &= 0 \\ &\vdots \\ -a^{\kappa}_{n-2\,i} Z^i_{n-3} + a^{\kappa}_{n-2\,i} Z^i_{n-2} &= 0 \\ -a^{\kappa}_{n-1\,i} Z^i_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

即チ
$$\left.\begin{aligned}
\underset{1}{a}{}_i^{\varkappa}\underset{1}{Z}{}^i &= 0\\
\underset{2}{a}{}_i^{\varkappa}(\underset{2}{Z}{}^i-\underset{1}{Z}{}^i) &= 0\\
&\cdots\\
\underset{n-3}{a}{}_i^{\varkappa}(\underset{n-2}{Z}{}^i-\underset{n-3}{Z}{}^i) &= 0\\
-\underset{n-1}{a}{}_i^{\varkappa}\underset{n-2}{Z}{}^i &= 0
\end{aligned}\right\}\qquad(6.13)$$

サテ曲線 C_p ハ $\underset{p}{a}{}_i^{\varkappa}\underset{p}{A}{}^i=0$ ナル $\underset{p}{A}{}^i$ ヲ用ヒテ次式ヲ積分シテ得ラレルモノデアル。

$$\frac{dx^1}{\underset{p}{A}{}^1}=\frac{dx^2}{\underset{p}{A}{}^2}=\cdots\cdots=\frac{dx^n}{\underset{p}{A}{}^n}\qquad(6.14)$$

サテ $\rho(\underset{p}{D})=n-1$ ナル故 $\underset{p}{A}{}^i$ ハ common factor ヲ除イテハ unique ニ定マル。然ルトキ (6.13) ト比較シテ次式ヲ得ル。

$$\underset{1}{Z}{}^i=\overset{1}{\lambda}\underset{1}{A}{}^i,\ \underset{2}{Z}{}^i-\underset{1}{Z}{}^i=\overset{2}{\lambda}\underset{2}{A}{}^i,\ \cdots,\ \underset{n-2}{Z}{}^i-\underset{n-3}{Z}{}^i=\overset{n-2}{\lambda}\underset{n-2}{A}{}^i,\ -\underset{n-2}{Z}{}^i=\overset{n-1}{\lambda}\underset{n-1}{A}{}^i\qquad(6.15)$$

是等ヲ辺々加フレバ
$$\overset{p}{\lambda}\underset{p}{A}{}^i=0\qquad(6.16)$$
此處デ $\overset{1}{\lambda}=\overset{2}{\lambda}=\cdots\cdots=\overset{n-1}{\lambda}=0$ トスレバ (6.15) ヨリ $\underset{1}{Z}{}^i=\underset{2}{Z}{}^i=\cdots\underset{n-2}{Z}{}^i=0$ ヲ得、始メノ仮定ニ反スル。故 $\overset{1}{\lambda},\overset{2}{\lambda},\cdots\cdots,\overset{n-1}{\lambda}$ ノ中ニハ 0 デナイモノガ少クトモ一ツ存在スル。然ルトキ $\underset{1}{A}{}^i,\ \cdots,\ \underset{n-1}{A}{}^i$ ノ中独立ナモノハ高々 $(n-2)$ 個デアル。

今此等ノ中独立ナモノガ m 個アルトスレバ $\underset{1}{A}{}^i w_i=\underset{2}{A}{}^i w_i=\cdots=\underset{n-1}{A}{}^i w_i=0$ ヲ満足スル w_i ノ中独立ナモノハ $(n-m)$ 個トナル。ソレヲ $\overset{r}{w}_i$ $(r=1,2,\ldots n-m)$ トスレバ $\overset{r}{w}_i\,dx^i=0$ ヲ満足スル integral equations ノ数ヲ N トスレバ $N\geqq n-m$ (1) 然ルニ $n-2\geqq m$, 故ニ $N\geqq 2$. 而シテ $\overset{r}{w}_i\,dx^i=0$ ヲ満足スル integral equations ノアラハス部分空間ハ曲線 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{n-1}$ ノ群ガ決定スル部分空間デアル。然ルトキ、ソノ部分空間ヲアラハス方程式ノ数ハ少クトモ 2 デアルカラ 高々

(1) Forsyth, Theory of Diff Eqs. I. p. 317

$(n-2)$ 次元デアル，依テ此時．点 P_0 ヲ固定シ．点 $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-2}$ ヲ夫々曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ 上ヲ変動セシメ．同時ニ夫レニ應ジテ曲線 $C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}$ ヲ変動セシメタ時．点 P_{n-1} ノ軌跡ハ hypersurface トナラズ．高々 $(n-2)$ 次元空間トナル。換言セバ (6.5) ヨリ $\overset{\lambda}{a}_{\rho}, \chi^i_1, \ldots, \chi^i_{n-2}$ ヲ消去スルトキ χ^i_0 ト χ^i_{n-1} トノ間ニ少クトモ 2 ツノ独立ナ関係式ヲ得ルコトニナル。サテ χ^i_0, χ^i_{n-1} ハ共ニ integral hypersurface $\varphi(\chi)=const.$ 上ノ点ナルガ故ニ $\varphi(\chi_0)=\varphi(\chi_{n-1})$ ナル関係ヲ満足スル。然ルトキ (6.5) ヨリ消去ノ結果ハ上ノモノヲ含ムトシテモ尚其以外ニ独立ノモノガ少クトモ一ツアル。依テ消去ノ結果得ラルル部分空間ハ integral hypersurface ト高々 $(n-2)$ 次元部分空間ヲ共有スル高々 $(n-2)$ 次元空間トナル。依テ消去ノ結果カラハ integral hypersurface 其ノモノハ求メラレナイコトニナル。
カクテ (6.5) ヨリ消去スルコトニヨッテ integral hypersurface ガ求メ得ラレルタメニハ $\rho(\Delta')=n(n-2)$ デナケレバナラヌコトニナル。

サテ Δ ニ於テ D_1 ノ第一行．D_2 ノ第一行．… ノ D_{n-2} ノ第一行ノ和ヲ D_{n-1} ノ第一行ニ加ヘルト D_{n-1} ノ第一行．元素ハ全部 0 トナル．依テ D_{n-1} ヨリ其第一行ヲ除イテ得ル matrix ヲ D'_{n-1} デアラハシ次式デ定義サレル square matrix ノ行列式ヲ Δ デアラハセバ．

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -D_2 & D_2 & & & \vdots \\ 0 & -D_3 & D_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -D_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -D'_{n-1} \end{vmatrix} \qquad (6.17)$$

$\rho(\Delta)=\rho(\Delta')$ ヨリ $\rho(\Delta')=n(n-2)$ トイフ條件ハ $\Delta \neq 0$ トイフ條件デオキカヘルコトガ出來ル。

カクテ n 個ノ変数ノ場合ニ於テ *Reymond* ノ方法ガ可能ナルタメニ $\rho(D_p) < n-1$ ナル p ガ存在スル場合ヲ除ケバ、次ノ條件ガ必要デアル。

［條件Δ］

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -D_2 & D_2 & & & \vdots \\ 0 & -D_3 & D_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -D_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & & & 0 & -D'_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta=0$ ナル時ニ於テモ $\rho(D_p)<n-1$ ナル p ガ存在スル場合ハ(6.6)ニ就テ論ジタ事ヨリ変数ノ数ガ n ヨリ小ナル場合ニ帰着セシメラレ 或ハ直チニ積分可能トナリ、或ハ所要ノ條件ヲ満足スル時ハ *Reymond* ノ方法ガ可能トナル。（後述スル如ク $\Delta \neq 0$ ナル條件ヲ満足スル時ハ *Reymond* ノ方法ガ可能トナリ、従ツテ $\rho(D_p)<n-1$ ナル時 $\Omega=0$ ガ m 個ノ変数ニ対シテハ $\rho(D_p)=m-1$ ナル如ク帰着セシメラレ、其時ノ $\Delta \neq 0$ ナラバ是ニ対シテ *Reymond* ノ方法ガ可能トナル。）

條件Δニツキ若干考察スル。

$\Delta \neq 0$ ナラバ $\rho(D_p)=n-1 \quad (p=1,2,\ldots,n-2)$ 何トナレバ一ツノ p ノ値ニ対應スル D_p ノ rank ガ $(n-1)$ ヨリ小ナラバ、ソノ D_p ノ行ニツイテ Δ ニ *Laplace* 展開ヲホドコセバ、$\Delta=0$ トナリ仮定ニ反スル。又 Δ ニ於テ D_1 ノ第一行、D_2 ノ第一行、……、D_{n-3} ノ第一行ノ和ヲ D_{n-2} ノ第一行ニ加フレバ、D_{n-2} ノ第一行ノ元素ハ D'_{n-1} ノ列ノ処ガ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ デ他ノ処ハ全部0トナル。依テ $\rho(D_{n-1})<n-1$ ナラバ、此ノ変換サレタ行列式ニ於テ D_{n-2} ノ第一行、及ビ D'_{n-1} ノ行ニツイテ *Laplace* 展開ヲホドコセバ $\Delta=0$ トナル。コレ又仮定ニ反ス。故ニ $\rho(D_{n-1})=n-1$。カクテ $\Delta \neq 0$ ナラバ $\rho(D_p)=n-1 \quad (p=1,2,\ldots,n-1)$ トナル。

$\rho(D_p)=n-1$ ナル時 $\Delta=0$, *i. e.* $\rho(\Delta')<n(n-2)$ ナラバ前ニ論ジタ如ク $a^{\kappa}_{p\,i} A^i_p=0$ ヲ満足スル A^i_p ハ(6.16)ニヨリ *linearly dependent* ニナル。即チ $A \equiv \|A^i_p\|$ トスレバ $\rho(A)<n-1$。コノ逆モ容易ニ証明サレル。

即チ $\rho\left(\underset{p}{D}\right)=n-1$ ナル時 $\rho(A)<n-1$ ナラバ $\Delta=0$, i. e. $\rho(\Delta')<n(n-2)$.

証明ハ次ノ通リ。

$\rho(A)<n-1$ ナル故 $\overset{p}{\lambda}\underset{p}{A^i}=0$ ヲ満足スル悉クハ 0 ナラザル $\overset{p}{\lambda}$ ガ存在スル。

然ルトキ $\overset{1}{\lambda}\underset{1}{A^i}=\underset{1}{Z^i}$, $\overset{1}{\lambda}\underset{1}{A^i}+\overset{2}{\lambda}\underset{2}{A^i}=\underset{2}{Z^i}$, $\cdots$, $\overset{1}{\lambda}\underset{1}{A^i}+\overset{2}{\lambda}\underset{2}{A^i}+\cdots+\overset{n-2}{\lambda}\underset{n-2}{A^i}=\underset{n-2}{Z^i}$ トオケバ $\overset{p}{\lambda}\underset{p}{A^i}=0$ ヨリ

又上式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}-\underset{n-2}{Z^i}&=\overset{n-1}{\lambda}\underset{n-1}{A^i}\\ \underset{1}{Z^i}&=\overset{1}{\lambda}\underset{1}{A^i}\\ \underset{2}{Z^i}-\underset{1}{Z^i}&=\overset{2}{\lambda}\underset{2}{A^i}\\ &\vdots\\ \underset{n-2}{Z^i}-\underset{n-3}{Z^i}&=\overset{n-2}{\lambda}\underset{n-2}{A^i}\end{aligned}\right\}\qquad(6.18)$$

サテ $\underset{p}{a^\kappa_i}\underset{p}{A^i}=0$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\underset{1}{a^\kappa_i}\underset{1}{Z^i}&=0\\ \underset{2}{a^\kappa_i}(\underset{2}{Z^i}-\underset{1}{Z^i})&=0\\ &\vdots\\ \underset{n-2}{a^\kappa_i}(\underset{n-2}{Z^i}-\underset{n-3}{Z^i})&=0\\ \underset{n-1}{a^\kappa_i}\underset{n-2}{Z^i}&=0\end{aligned}\right\}$$

即チ (6.13) ガ成立スル。而シテ $\underset{1}{Z^i}=\cdots\cdots=\underset{n-2}{Z^i}=0$ ナラバ (6.18) ヨリスベテノ $\overset{p}{\lambda}$ ガ 0 トナル。コレ始メノ仮定ニ反スル。故ニ $\underset{1}{Z^i}, \cdots\cdots, \underset{n-2}{Z^i}$ ノ中ニハ少クトモ一ツ 0 デナイモノガ存在スル。然ルトキ $\rho(\Delta')<n(n-2)$ i. e. $\Delta=0$ トナル。

カクテ $\Delta\neq 0$ ナラバ $\rho\left(\underset{p}{D}\right)=n-1$ ニシテ $\rho(A)\leqq n-1$ ナル故、若シ此時 $\rho(A)<n-1$ トスレバ上ノ議論ヨリ $\Delta=0$ トナリ仮定ニ反ス。故ニ $\rho(A)=n-1$. 逆ニ $\rho\left(\underset{p}{D}\right)=n-1$ ニシテ且ツ $\rho(A)=n-1$ ナラベ $\Delta\neq 0$. 何トナレバ $\Delta=0$ ナラバ $\rho\left(\underset{p}{D}\right)=n-1$ ヨリ前ノ議論ニヨリ $\rho(A)<n-1$ トナリ此又仮定ニ反ス。カクテ条件 Δ ハ $\rho\left(\underset{p}{D}\right)=\rho(A)=n-1$ ト equivalent ニナル。即チ条件 Δ ハ次ノ條件 A デオキカヘルコトガ出来ル

【條件A】 $\rho(\underset{p}{\mathfrak{D}})=n-1$ 且ツ $\rho(A)=n-1$.

次ギニ條件△又ハAハ Reymond ノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デアルコトヲ證明スル。以下ニ於テハ條件△若ハ條件Aハ滿足サレテヰルトシテ議論ヲ進メル。

$\Omega=0$ ハ integrable ナリトシ，其任意ノ integral ヲ $\varphi(x)=$ const. トスル。$\underset{p}{\mathfrak{D}}=(6.2)$ ヲ代入スレバ條件Aニ依リ $\rho(\underset{p}{\mathfrak{D}})=n-1$ ナルコトカラ $\varphi, \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}$ ハ互ニ獨立ナ $(n-1)$ 個ノ函數デアル。且ツ $\varphi, \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}$ ハ明ラカニ (6.4) ノ integral ヲアタヘル。然ルトキ (6.4) ノ integral $\underset{p}{f}$ ハ是等ノ函數デナケレバナラヌ。即チ

$$\underset{p}{f}=\underset{p}{f}(\varphi, \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}) \qquad (6.19)$$

而モ $\underset{p}{f}$ ハ $\underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}$ ニ獨立デアルカラ $\frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial\varphi}\neq 0$. 然ルトキ (6.5) ハ次ノ如ク書キカヘルコトガ出來ル。

$$\left.\begin{aligned} \underset{p}{f}(\varphi(\underset{p-1}{x}), \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p-1}{x})) &= \underset{p}{f}(\varphi(\underset{p}{x}), \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p}{x})) \\ \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p-1}{x}) &= \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p}{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

然ルトキ我々ハ (6.20) ヨリ $\underset{1}{x}^i, \underset{2}{x}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{x}^i$ ヲ消去スレバヨイコトニナル。然ルニ $\frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial\varphi}\neq 0$ ヨリ第二式ヲ利用シテ第一式ヨリ $\varphi(\underset{p-1}{x})=\varphi(\underset{p}{x})$. 故ニ $\underset{1}{x}^i, \underset{2}{x}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{x}^i$ ヲ消去シテ $\varphi(x)=\varphi(\underset{n-1}{x})$ ヲ得ル.

扨 (6.20) ノ右辺ヲ左辺ニ移項シ.

$$\left.\begin{aligned} \underset{p}{f}(\varphi(\underset{p-1}{x}), \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p-1}{x})) - \underset{p}{f}(\varphi(\underset{p}{x}), \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p}{x})) &= 0 \\ \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p-1}{x}) - \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}(\underset{p}{x}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

左辺ノ式ノ $\underset{1}{x}^i, \underset{2}{x}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{x}^i$ ニ關スル Jacobian matrix ヲ J トスル.

$$\underset{p}{J}\equiv\begin{pmatrix} \frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+\frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}}\frac{\partial \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}}{\partial x^1}, & \cdots\cdots\cdots & , \frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}+\frac{\partial \underset{p}{f}}{\partial \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}}\frac{\partial \underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}}{\partial x^n}, \\ \frac{\partial \underset{p}{\overset{2}{\chi}}}{\partial x^1}, & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial \underset{p}{\overset{2}{\chi}}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \underset{p}{\overset{n-1}{\chi}}}{\partial x^1}, & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial \underset{p}{\overset{n-1}{\chi}}}{\partial x^n} \end{pmatrix} \qquad (6.22)$$

トオキ $\underset{p}{J}$ ニ於テ $x^i=\underset{q}{x}^i$ トセルモノヲ $\underset{p}{J}_q$ デアラハセバ J ハ次ノ如クナル.

$$
J = \begin{pmatrix}
-\underset{1}{\vartheta}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\underset{2}{\vartheta}_1 & \underset{2}{\vartheta}_2 & & & \vdots \\
0 & \underset{3}{\vartheta}_2 & -\underset{3}{\vartheta}_3 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \\
\vdots & & & \underset{n-2}{\vartheta}_{n-3} & -\underset{n-2}{\vartheta}_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \underset{n-1}{\vartheta}_{n-2}
\end{pmatrix} \tag{6.23}
$$

J ニ於テ $\underset{1}{\chi}^i = \underset{2}{\chi}^i = \cdots\cdots = \underset{n-2}{\chi}^i = \chi^i$ ト置イタモノヲ J' デアラハス。然ルトキ若シ $\rho(J) < n(n-2)$ ナラバ $\rho(J') < n(n-2)$. 然ルニ (6.2) 及ビ $\lambda \neq 0$, $\frac{d\xi}{d\varphi} \neq 0$ ヲ用フレバ $\rho(J') = \rho(\Delta')$ $\therefore \rho(\Delta') < n(n-2)$. 此レ條件Δニ反ス。故ニ $\rho(J) \leqq n(n-2)$ ヨリ $\rho(J) = n(n-2)$. 而シテ (6.21) ノ方程式ノ数ハ $(n-1)+(n-1)(n-2) = (n-1)^2 = n^2-2n+1$ 依テ (6.21) ヨリ $\underset{1}{\chi}^i, \cdots, \underset{n-2}{\chi}^i$ ヲ消去セル結果ハ消去式ハ高々一ツデアル。然ルニ既ニ $\varphi(\underset{0}{\chi}) = \varphi(\underset{n-1}{\chi})$ ナル消去式ヲ得テヰル。依テ消去式ハ algebraic equivalence ヲ除イテハ唯一ツデアリ. 其レハ $\varphi(\underset{0}{\chi}) = \varphi(\underset{n-1}{\chi})$ = algebraically equivalent デアル。カクテ次ノ結果ガ得ラレタ。

$\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ガ條件Δ若ハ A ヲ滿足スル如ク選バレタ時. $\underset{p}{\xi}$ ヲ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ニ独立デアル如ク取レバ, (6.20) ヨリ $\underset{1}{\chi}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{\chi}^i$ ヲ消去セル結果ハ——換言セバ (6.5) ヨリ $\overset{\lambda}{\underset{p}{a}}, \underset{1}{\chi}^i, \cdots\cdots, \underset{n-2}{\chi}^i$ ヲ消去セル結果ハ 消去式ガ唯一ツ必ズ存在シ. 其ハ $\varphi(\underset{0}{\chi}) = \varphi(\underset{n-1}{\chi})$ = algebraically equivalent ニナル. 即チ $\Omega = 0$ ガ integrable ナル時. 其任意ノ integral ヲ $\varphi(\chi) = const.$ トスレバ 消去式ノ $\Phi(\underset{0}{\chi}, \underset{n-1}{\chi}) = 0$ ハ必ス $\varphi(\underset{0}{\chi}) = \varphi(\underset{n-1}{\chi})$ ニ帰着セシメラレル。

カクテ條件Δ若ハ A ガ滿足サレテ居ル時ハ 消去ニ於テ $\Omega = 0$ ノ integral $\varphi(\chi) = const$ ガ得ラレタ. コノ條件Δ若ハ

A ハ Reymond ノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デモアルコトガ分ッタ。

次ニ上ノ結果ノ逆ヲ考ヘル。即チ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ガ條件 Δ 若ハ A ヲ満足スル如ク選バレタ時, 方程式ノ (6.4) ヲ作リ, 是ノ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ニ独立ナ integral $\underset{p}{f}$ ヲ用ヒテ作ッタ (6.5) ヨリ $\overset{\lambda}{\underset{p}{a}}$, $\underset{1}{\chi^i}$, ……, $\underset{n-2}{\chi^i}$ ヲ消去セル結果ガ $\phi(\underset{0}{\chi})=\phi(\underset{n-1}{\chi})$ ノ形ニナッタトスル。然ルトキハ $\Omega=0$ ハ integrable トナリ, $\phi(\chi)=const.$ ガ其ノ integral トナル. トイフコトヲ証明スルコトガ出来ル, 即チ次ノ如シ.

(6.5) ニ於テ $\underset{n-1}{\chi^i}=\underset{n-2}{\chi^i}$ トオイテモ勿論 (6.5) ハ成立スル。故ニ消去セル結果ガ $\phi(\underset{0}{\chi})=\phi(\underset{n-1}{\chi})$ ナラバ $\phi(\underset{0}{\chi})=\phi(\underset{n-2}{\chi})=\phi(\underset{n-1}{\chi})$ ヲ得ル。同様ニシテ $\underset{n-1}{\chi^i}=\underset{n-2}{\chi^i}=\underset{n-3}{\chi^i}$ ……等ト順次オイテモ (6.5) ハ成立スル故

$$\phi(\underset{0}{\chi})=\phi(\underset{1}{\chi})=\cdots\cdots\quad=\phi(\underset{n-2}{\chi})=\phi(\underset{n-1}{\chi})\qquad(6.24)$$

サテ $\underset{p}{\chi^i}$ ハ (6.4) ノアラハス曲線上ノ任意ノ点デアルカラ $\phi(\underset{p-1}{\chi})=\phi(\underset{p}{\chi})$ ハ $\phi(\chi)$ ガソノ曲線上ニ於テ constant デアルコトヲ示シテヰル。然ルトキ (6.24) ハ $\phi(\chi)$ ガ (6.4) ノアラハススベテノ曲線上ニ於テ constant デアルコトヲ示ス。故ニ (6.4) ヲ満足スル任意ノ $d\chi^i$ ニ対シテ $\frac{d\phi}{d\chi^i}d\chi^i=0$. 且ツ條件 A ヨリ $\rho(\underset{p}{D})=n-1$. ナル故次式ヲ満足スル $\overset{p}{\rho}$, $\overset{p}{\rho_\lambda}$ ガ存在スル。

$$\frac{d\phi}{d\chi^i}=\overset{p}{\rho}\chi_i+\overset{p}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}}{d\chi^i}\ .\ (\ p:\ not\ summed)\quad(6.25)$$

然ルトキ

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{1}{\rho}\chi_i+\overset{1}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{1}{\chi}}}{d\chi^i}-\overset{2}{\rho}\chi_i-\overset{2}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{2}{\chi}}}{d\chi^i}=0\\
&\overset{2}{\rho}\chi_i+\overset{2}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{2}{\chi}}}{d\chi^i}-\overset{3}{\rho}\chi_i-\overset{3}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{3}{\chi}}}{d\chi^i}=0\\
&\qquad\vdots\\
&\overset{n-2}{\rho}\chi_i+\overset{n-2}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{n-2}{\chi}}}{d\chi^i}-\overset{n-1}{\rho}\chi_i-\overset{n-1}{\rho_\lambda}\frac{d\overset{\lambda}{\underset{n-1}{\chi}}}{d\chi^i}=0
\end{aligned}\right\}\quad(6.26)$$

扨 $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\rho}_\lambda, \overset{2}{\rho}, \overset{2}{\rho}_\lambda, \ldots\ldots, \overset{n-1}{\rho}, \overset{n-1}{\rho}_\lambda$ ノ係数ノ matrix ヲ作レバ丁度 Δ'^{*} トナル。（* ハ transposed matrix ヲアラハス。）條件 Δ ヨリ $\Delta=0$.

$\therefore \rho(\Delta') = \rho(\Delta'^{*}) = n(n-2).$

サテ $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\rho}_\lambda, \ldots\ldots, \overset{n-1}{\rho}, \overset{n-1}{\rho}_\lambda$ ノ数ハ $(n-1)^2 = n(n-2)+1$. 故ニ (6.26) ヲ是等 ρ ニ関スル linear homogeneous equations ト考ヘレバ linearly independent ナ解ハ唯一ツ存在スル。然ルニ $\overset{1}{\rho}=\overset{2}{\rho}=\cdots=\overset{n-1}{\rho}=\rho$, $\overset{i}{\rho}_\lambda=0$ ハ明ラカニ (6.26) ノ解デアル。依テ (6.26) ノ一般解ハ $\overset{1}{\rho}=\overset{2}{\rho}=\cdots=\overset{n-1}{\rho}=c\rho$, $\overset{i}{\rho}_\lambda=0$. $c\rho$ ヲ入レ書ケバ (6.25) ハ次ノ如クナル。

$$\frac{d\phi}{dx^i} = \lambda X_i$$

即チ (62) ヲ得ル。故ニ $\Omega=0$ ハ integrable トナリ、$\phi(x)=\text{const.}$ ガ其ノ integral トナル。即チ逆ガ証明サレタ。

以上述ベタ事ニヨリ Reymond ノ方法ハ変数ガ n 個ノ場合ニモ拡張サレルコトガ明カニナリ、消去式ノ分解ニ関スル定理モソノマヽ成立スルコトガ分ツタ。

上述ノ場合ニハ F_p ノ方程式トシテ最モ一般ニ各々ガ $(n-2)$ 個ノ方程式ノ組カラ成ル場合ヲ取リ扱ツタガ、特ニ F_p ガ次ノ如クアラハサレルニハ、條件 Δ ハ非常ニ簡単ニナル。即チ $(n-1)$ 個ノ互ニ独立ナ函数 $\overset{\kappa}{X}$ $(\kappa=1,2,\ldots,n-1)$ ヲ取リ、F_p ハ次式デ定義サレルトスル。

$$F_p:\ \overset{\kappa}{X} = \overset{\kappa}{a} \quad (\overset{\kappa}{a}=\text{const.}) \quad (\kappa=1,2,\ldots,p-1,\ p+1,\ldots,n-1) \tag{6.27}$$

此時 Δ ヲ計算スレハ次ノ如クナル。

$$\Delta = \epsilon D^{n-2} \qquad \epsilon=+1 \text{ 又ハ } -1 \quad \cdots\cdots \tag{6.28}$$

$$D = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \cdots\cdots & X_n \\ \dfrac{d\overset{1}{X}}{dx^1} & \dfrac{d\overset{1}{X}}{dx^2} & \cdots\cdots & \dfrac{d\overset{1}{X}}{dx^n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{d\overset{n-1}{X}}{dx^1} & \dfrac{d\overset{n-1}{X}}{dx^2} & \cdots\cdots & \dfrac{d\overset{n-1}{X}}{dx^n} \end{vmatrix}$$

故ニ條件 Δ ハ $D \neq 0$ デオキカヘルコトガ出来ル。

以上